Baccalauréat S Antilles-Guyane 16 juin 2017

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E): \qquad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Baccalauréat S Métropole–La Réunion 12 septembre 2016

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$.

1. a. Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.
   Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?
   Prouver cette conjecture.
2. Déterminer z_{2016} sans le cas où $z_0 = 1 + i$.
3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

Voir correction au verso

Correction Antilles-Guyane juin 2017

1. On a $1^4+2\times 1^3-1-2=1+2-1-2=0$, donc 1 est solution de (E).
2. Soit $z\in\mathbb{C}$, alors :

$$\left(z^2+z-2\right)\left(z^2+z+1\right)=z^4+z^3+z^2+z^3+z^2+z-2z^2-2z-2=z^4+2z^3-z-2.$$

3. D'après la question précédente, l'équation (E) équivaut à

$$z^2+z-2=0 \quad \text{ou} \quad z^2+z+1=0$$

- l'équation $z^2+z-2=0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta=9$; elle possède donc deux solutions réelles qui sont -2 et 1 ;
- l'équation $z^2+z+1=0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta=-3$, elle possède deux solutions complexes conjuguées qui sont $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Les solutions de (E) sont donc : -2, 1, $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction Métropole - La Réunion septembre 2016

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n\geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1}=1-\dfrac{1}{z_n}$.

1(a) Dans cette question, on suppose que $z_0=2$.

Déterminons la forme algébrique des nombres z_n pour n allant de 1 à 6.

$z_1=1-\dfrac{1}{z_0}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$; $z_2=1-\dfrac{1}{z_1}=1-2=-1$; $z_3=1-\dfrac{1}{z_2}=1-\dfrac{1}{-1}=1+1=2=z_0$.

Ensuite on retrouve z_4, z_5 et z_6 par un calcul analogue.

Ainsi $\boxed{z_1=z_4=\dfrac{1}{2}}$; $\boxed{z_2=z_5=-1}$; $\boxed{z_3=z_6=2}$

(b) Dans cette question, on suppose que $z_0=\mathrm{i}$.

Déterminons la forme algébrique des nombres z_n pour n allant de 1 à 6.

$z_1=1-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=1-\dfrac{i}{\mathrm{i}^2}=1+\mathrm{i}$;

$z_2=1-\dfrac{1}{z_1}=1-\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=1-\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}=\dfrac{2-1+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$;

$z_3=1-\dfrac{1}{z_2}=1-\dfrac{1}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}}=1-\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$

$=\dfrac{-1+\mathrm{i}+\mathrm{i}+1}{1+1}=\dfrac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}=z_0$;

Ainsi, comme en (a), $\boxed{z_1=z_4=1+\mathrm{i}}$; $\boxed{z_2=z_5=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$; $\boxed{z_3=z_6=\mathrm{i}}$

(c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.

Des résultats de la question précédente, on peut conjecturer que : $\forall n\in\mathbb{N}, z_{3n}=z_0$

Démontrons cette conjecture par récurrence

- **Initialisation :** on a bien $z_{3\times 0}=z_0$. L'initialisation est vérifiée pour $n=0$.
- **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $z_{3n}=z_0$ et montrons qu'alors $z_{3(n+1)}=z_0$

Or $z_{3(n+1)}=z_{3n+3}=1-\dfrac{1}{z_{3n+2}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z_{3n+1}}}=1-\dfrac{z_{3n+1}}{z_{3n+1}-1}=\dfrac{z_{3n+1}-1-z_{3n+1}}{z_{3n+1}-1}$

$$=\frac{-1}{z_{3n+1}-1}=\frac{-1}{1-\dfrac{1}{z_{3n}}-1}=\frac{-1}{-\dfrac{1}{z_{3n}}}=z_{3n}=z_0.$$

L'hérédité est bien vérifiée.

- **Conclusion :** Le principe de récurrence permet de conclure que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad z_{3n}=z_0}$$

2. Déterminons z_{2016}.

Comme $2\ 016=3\times 672$, on a d'après la question précédente $\boxed{z_{2016}=z_0=1+\mathrm{i}}$.

3. Déterminons les valeurs possibles pour z_0 telles que $z_0=z_1$

$z_0=z_1 \Leftrightarrow z_0=1-\dfrac{1}{z_0}$ (avec $z_0\neq 0$).

Or sur $\mathbb{C}^*$,

$z_0=1-\dfrac{1}{z_0}\Leftrightarrow z_0^2=z_0-1\Leftrightarrow z_0^2-z_0+1=0$

L'équation $z_0^2-z_0+1=0$ est une équation du second degré que l'on résout dans $\mathbb{C}^*$.

$\Delta=(-1)^2-4\times 1\times 1=-3$; $\Delta<0$, l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{-(-1)-i\sqrt{3}}{2\times 1}=\boxed{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ et } \frac{-(-1)+i\sqrt{3}}{2\times 1}=\boxed{\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Il y a donc deux valeurs de z_0 pour lesquelles $z_1=z_0$.

Dans ces deux cas, on peut montrer par une récurrence évidente que les suites $\boxed{(z_n) \text{ sont constantes}}$.